TD 2. Equation d'onde et propagation.

I. L'onde électromagnétique plane, progressive, monochromatique

Les vecteurs sont repérés en coordonnées cartésiennes par les axes orthonormés *Ox*, *Oy*, *Oz*. On considère une onde électromagnétique plane, monochromatique, se propageant dans le vide dans la direction *Oz*.

1. Le champ électrique s'écrit, en notation réelle, $\mathbf{E} = E_0 \cos(kz - \omega t + \varphi)\mathbf{u}_x$.
   a. Justifier que cette onde est une *onde plane.*
   b. Quelle est la polarisation de l'onde ? Quels sont les axes principaux de la polarisation ?
   c. Quelle est la relation entre ω et *k* ? Comment appelle-t-on cette relation ?
   d. Donner l'expression du vecteur d'onde **k** de l'onde.
   e. Donner l'expression du champ magnétique de l'onde.
   f. Représenter la structure de l'onde dans le repère *Oxyz* à $t = 0$ pour $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.
   g. Donner l'expression en notation complexe du champ **E**.
2. On considère maintenant le champ **E** suivant en notation complexe : $\underline{\mathbf{E}} = E_{0x}\,\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)}\mathbf{u}_x + E_{0y}\,\mathrm{e}^{i(kz-\omega t+\pi/2)}\mathbf{u}_y$.
   a. Donner l'expression du champ **E** en notation réelle.
   b. Représenter l'évolution du champ **E** en fonction du temps en $z = 0$.
   c. Quelle est la polarisation de l'onde ? Quels sont les axes principaux de la polarisation ?
3. On considère maintenant le champ **E** suivant : $\underline{\mathbf{E}} = E_{0x}\,\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)}\mathbf{u}_x$, où $k = k_r + ik_i$, k_r et k_i étant réels.
   a. Donner l'expression en notation réelle du champ **E**.
   b. Quelle est la nature de l'onde ?

II. Relation de dispersion (cet exercice est un rappel de cours)

Les vecteurs sont repérés en coordonnées cartésiennes par les axes orthonormés *Ox*, *Oy*, *Oz*. On considère une onde électromagnétique plane, monochromatique, se propageant dans le vide, de pulsation ω et de vecteur d'onde **k**. En notation complexe : $\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{E}}_0\,\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$ et $\underline{\mathbf{B}} = \underline{\mathbf{B}}_0\,\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$.

1. Montrer que $\mathrm{div}\,\underline{\mathbf{E}} = \nabla\cdot\underline{\mathbf{E}} = i\mathbf{k}\cdot\underline{\mathbf{E}}$ et que $\dfrac{\partial\underline{\mathbf{E}}}{\partial t} = -i\omega\underline{\mathbf{E}}$. Dans la suite on admettra que $\mathbf{rot}\,\underline{\mathbf{E}} = \nabla\wedge\underline{\mathbf{E}} = i\mathbf{k}\wedge\underline{\mathbf{E}}$.
2. Réécrire les équations de Maxwell dans le vide satisfaites par l'onde électromagnétique en utilisant les relations ci-dessus. Donner l'interprétation physique de chacune des quatre équations.
3. Déduire des équations obtenues ci-dessus la relation de dispersion, c'est à dire la relation entre *k* et ω.

III. L'effet de peau. Applications : four à micro-ondes et sondages géophysiques par ondes électromagnétiques

On considère un conducteur où la densité de charge est nulle $\rho = 0$, et la densité de courant liée au champ électrique par la relation $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$, où σ est la conductivité. On considère dans le conducteur l'onde plane, progressive, monochromatique suivante : $\underline{\mathbf{E}} = E_0\, e^{i(kz+\omega t)}\, \mathbf{u}_x$.

1. Ecrire les équations de Maxwell satisfaite par l'onde dans le conducteur.
2. A quelle condition sur σ et ε_0 peut-on négliger le terme $\mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ par rapport à **j** ?
3. On suppose cette condition vérifiée. Montrer que l'équation de propagation dans le conducteur s'écrit $\dfrac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} = \mu_0\sigma \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$. Exprimer *k* en fonction de ω et σ, puis le champ électrique en notation réelle.
4. L'aluminium possède une conductivité de $\sigma = 3{,}5\times 10^{7}\ \mathrm{Sm^{-1}}$. Les fours à micro-onde émettent à une fréquence de $2{,}45\ \mathrm{GHz}$. Peut-on chauffer des aliments contenus dans un plat en aluminium ?
5. La conductivité des roches et du sol varie entre $\sigma = 10^{-4}\ \mathrm{Sm^{-1}}$ pour les sols secs et $\sigma = 10^{-2}\ \mathrm{Sm^{-1}}$ pour les sols humides. On cherche à sonder le sol avec un radar émettant à une fréquence de 5,5 MHz (fréquence du radar à bord de la sonde Mars Express). Jusqu'à quelle profondeur peut-on sonder ? Faut-il augmenter ou diminuer la fréquence des ondes pour sonder plus profondément ?
6. La conductivité du corps humain vaut $\sigma = 0{,}2\ \mathrm{Sm^{-1}}$ et la fréquence des téléphones portables est de 900 MHz. Sur quelle épaisseur du cerveau sont absorbées les ondes émises ?

IV. **Guide d'ondes** (exercice « à la limite », pourra être abordé en suivi)

Un *guide d'onde G* est un cylindre métallique creux illimité, d'axe Oz, et dont la section droite est le rectangle $0 < x < a$, $0 < y < b$; l'intérieur du guide est rempli d'air, assimilé au vide. On admet que les champs **E** et **B** sont nuls dans le métal. On admet de plus que la composante tangentielle $\mathbf{E}_t$ du champ électrique et la composante normale $\mathbf{B}_n$ du champ magnétique doivent s'annuler sur les parois du guide.

1. Dans toute la suite, on cherche en notation complexe un champ électrique de la forme :
$$\underline{\mathbf{E}} = A(x,y)\, e^{i(\omega t - k_g z)}\mathbf{u}_y$$
   a. Montrer que $A(x,y)$ ne dépend pas de *y*.
   b. Ecrire l'équation aux dérivées dont est solution $A(x)$, et montrer que nécessairement $k_g^2 < \omega^2/c^2$.
   c. Dans toute la suite, on pose $k_t^2 = \omega^2/c^2 - k_g^2$. Etablir les expressions possibles $A_n(x)$ de $A(x)$ et la relation de dispersion $k_{g,n}(\omega)$ correspondante, en introduisant un entier *n*. Dans toute la suite, on appellera *mode n*, la solution associée à l'indice *n*.

d. Faire apparaître une « pulsation critique » $\omega_{n,c}$; discuter brièvement la nature des ondes obtenues.
e. Calculer numériquement la plus petite fréquence permettant de propager une onde dans un guide pour $a = 2b = 5$ cm.
f. Pour $\omega > \omega_{n,c}$, commenter l'expression de E_n d'une part à *z* fixé et d'autre part à *x* fixé.
g. Calculer la vitesse de phase et la vitesse de groupe et commenter sachant que les principes de la relativité interdisent la propagation d'une information à une vitesse supérieure à la célérité *c* des ondes électromagnétiques dans le vide.

2. Calculer le champ magnétique **B** du mode *n* et vérifier qu'il satisfait aux conditions limites. Vérifier qu'il n'est pas transversal et interpréter graphiquement ce fait en décomposant le mode étudié en deux ondes électromagnétiques planes progressives harmoniques.